DẠNG BÀI TẬP ÔN LUYỆN THI OLYMPIC CẤP TRƯỜNG 2017-2018

1. Dẫy số

$$a)\ \ Cho\ \ x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n};\quad \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$b)\ \ Cho\ \ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{4k^2+12k+5};\quad \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. Giới hạn

$$A = \lim_{x\to 2}\left(2^x - 3\right)^{ctg(x-2)}$$

$$B = \lim_{x\to 1}\left(1-x\right)^{\frac{\cos\pi x}{2}}$$

$$C = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\tan x\right)^{\frac{\pi}{2}-x}$$

3. Tìm và phân biệt điểm gián đoạn

$$a)\ \ f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < -1, \\ 3\cos\pi x, & -1 \le x \le 2, \\ \left|5-x\right|, & x > 2. \end{cases}$$

$$b)\ \ f(x) = \begin{cases} \left|x-1\right|, & \left|x\right| > 1 \\ -\sin\pi x, & \left|x\right| \le 1 \end{cases}$$

4. Tính đạo hàm

$$a)\ \ y = \frac{2x+1}{x^2-4x+3},\ \mathrm{y}^{(\mathrm{n})} = ?$$

$b)\ \ y = x^3 \sin 2\mathrm{x},\ \ \mathrm{y}^{(n)} = ?$

c) $f(\mathrm{x}) = x(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)...(\mathrm{x}-2017),\ \ f'(1) = ?$

5. Xét tính khả vi cảu hàm số trên R

$$a)\ \ f(x) = \begin{cases} e^{2x}+1, & x \le 0, \\ \mathrm{x}+2\cos x, & 0 < x \le 1, \\ 3\cos(\mathrm{x}-1), & x > 1. \end{cases}$$

$$\mathrm{b)}\ \ f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

6. Tìm các đường tiệm cận

$$a)\ y = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$\mathrm{b)}\ \begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1-t^2} \\ y = \dfrac{4}{1+t} \end{cases}$$

7. Định lý giá trị trung bình cho lớp hàm khả vi

a) Giả sử hàm số f liên tục trên $[0,+\infty),\ f(\mathrm{x}) \ge 0, \forall\, \mathrm{x} \ge 0$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(\mathrm{x}) = \dfrac{2017}{2018}$. CMR tồn tại số $c \ge 0$ sao cho $f(c) = c$.

b) Cho f là hàm liên tục trên đoạn [a,b], khả vi trong khoảng (a,b) và có $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng với mọi số thực $\alpha \in R$ bất kì luôn tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\alpha f(c) + f'(c) = 0$.

c) Cho f là hàm liên tục trên đoạn [0,1], khả vi trong khoảng (0,1) và có $f(0)=0,\ f(1)=1$. Chứng minh rằng với mọi số thực $\alpha \in (0,1)$ bất kì luôn tồn tại $x_1, x_2 \in (0,1),\ x_1 \neq x_2$ sao cho $\frac{\alpha}{f'(x_1)} + \frac{1-\alpha}{f'(x_2)} = 1.$

d) Cho f là hàm liên tục trên đoạn [a,b], khả vi trong khoảng (a,b) với $b-a \geq 4$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) < 1 + f^2(c).$

e) Cho hàm $f:[0,1] \to \mathrm{R}$ là hàm tăng và khả vi với f' là hàm giảm.

Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi

$$x_n = \frac{1}{1^2} f'(\frac{1}{1}) + \frac{1}{2^2} f'(\frac{1}{2}) + \ldots + \frac{1}{n^2} f'(\frac{1}{n}),\ n \in N.$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ là dỹ hội tụ.

8. Tính tích phân

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+(2n-1)}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{2013}+2^{2013}+3^{2013}\ldots+n^{2013}}{n^{2014}}$

c) Cho f là hàm chẵn liên tục trên đoạn $[-a,a]$, g là hàm liên tục nhận giá trị dương trên đoạn $[-a,a]$ và $g(-x) = \frac{1}{g(x)}, \forall x \in [-a,a].$ Chứng minh rằng:

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+g(x)}dx = \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Áp dụng tính: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sqrt{x^2+1}-x}dx.$

9. Định lý trung bình tích phân

a) Cho f và g xác định trên [0,1]

Chứng minh rằng $\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx.$

b) Cho f là hàm liên tục trên [a,b] và $\int_a^b f(x)dx.$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho:

$$\int_a^c f(x)\,dx = f(c).$$

10. Ứng dụng khai triển Taylor, Maclau rin

a) Tìm a sao cho đẳng thức sau đúng với mọi x thuôc lân cận điểm 0

$$\ln(1+x) \ge x - a x^2$$

b) Cho f khả vi 2 lần trong khoảng (0,1) và có $f(0) = f(1) = 0, \min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$.

Chứng minh rằng $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \ge 8.$

c) Cho f khả vi trên [a,b] và giả sử rằng $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại f'' trong khoảng (a,b) thì tồn tại điểm $c \in (a,b)$ sao cho:

$$f''(c) \ge \frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b) - f(a)\right|.$$